

Problemas comentados

A cargo del Club Matemático

Cuando hablamos de actividades en el centro pensamos, habitualmente, en aquellas que se realizan en el aula. Pero hay otras actividades que, aunque se complementan en el aula, se exponen y llevan a cabo fuera de este espacio. Nos referiremos a algunas de ellas.

Empezaremos por el Rincón Científico o Rincón de las Matemáticas.

El rincón de las matemáticas

Consiste en un tablero de corcho donde, semanalmente, se expone material informativo sobre:

- Noticias relacionadas con las matemáticas.
- Historia de las matemáticas.
- Aspectos de resolución de problemas.
- Información y Puntuaciones del Concurso de Problemas.
- Arte y matemáticas.
- Presentación de juegos.

Debe estar situado en un sitio de paso de los alumnos. En el hall principal o en el pasillo más frecuentado.

Debe ser amplio, colocado a una altura adecuada para facilitar la lectura de los niños y niñas.

Debe dársele una disposición estética a los materiales empleados, que atraigan la atención por su colorido, luminosidad y colocación.

Cada semana hay que poner algo nuevo.

Usar rótulos grandes, tipos variados de letras, materiales motivadores. Al poco tiempo de empezar a usarlo, los alumnos se acostumbran a ir al panel a buscar la información nueva.

Aparecerán las preguntas, los por qué, el deseo de saber más. El profesor aprovechará esa motivación para montar sus clases.

Si está en marcha la vuelta ciclista, se aprovechará para situar la carrera,

buscar los números que giran alrededor de la bicicleta o del ciclista, gráficas con los perfiles de etapas. Se harán cálculos, se propondrán otros.

Si se hace un concurso de problemas, en el panel se expondrá cada problema, la solución del profesor, la explicación de las estrategias utilizadas, las mejores soluciones aportadas por los alumnos, la lista de puntuaciones, etc.

Si funciona el taller de juegos, aquí se anunciará todo lo relativo a él, se expondrá el próximo juego a trabajar. Los alumnos estarán deseosos de establecer contacto con él.

Si hay una biblioteca matemática, se comentará algún libro y se propondrá su lectura. Se ofrecerá una guía de lectura del mismo.

El panel será el órgano informativo de los propios alumnos en temas relacionados con las matemáticas. Ellos podrán buscar sus propias noticias y aportarlas al profesor.

Este panel puede subdividirse y, entonces, situar varios paneles de manera que cada uno de ellos se pueda dedicar a un aspecto específico. Podríamos tener así:

- Tablero de problemas
- Esquina de los enigmas
- Noticiario matemático
- La curiosidad matemática de la semana
- El problema de la semana
- Etcétera.

Todas tienen el elemento común de presentarse en un marco exterior al aula, en soporte escrito o gráfico, pueden acceder todos los alumnos aunque vaya expresamente dirigido a un grupo de ellos.

El tablero de problemas

Si se dispone de espacio suficiente y hay interés, una idea magnífica consiste en independizar los temas del Rincón. Casi siempre el primero que toma formato independiente es el relativo a los problemas. En este caso, podría mantenerse en el panel principal lo relativo a la información sobre Concursos, Torneos y Olimpiadas y dar un tratamiento especial a las estrategias de pensamiento, los problemas inusuales o divertidos, los pro-

blemas basados en gráficos o dibujos, etc. Se puede solucionar el tema con un panel nuevo, que acompaña al otro de tipo más general, o unos marcos sencillos de los que se utilizan para enmarcar láminas (nosotros utilizamos los marcos de los retratos antiguos del Rey, aquellos horribles, de plástico que más tarde fueron cambiados por otros de mejor aspecto). En ellos se colocan los recortes de revistas, libros viejos o cuartillas que contienen los problemas y las informaciones que queremos presentar. Hay libros de texto de muestra en nuestro Departamento que se quedan obsoletos. Aparte de constituir en sí mismos unas estupendas baterías de problemas, también tienen fotografías, dibujos, anécdotas, etc. Que sería una pena desperdiciar. Con un poco de trabajo, recortando y pegando se puede tener un magnífico repertorio de cosas que exponer en nuestro panel. También se pueden enmarcar láminas interesantes que pueden servir de motivación: grabados de Escher, ilusiones ópticas, fotografías de contenido matemático, ...

Cuando se expone un problema (no hace falta más) se debe plantear de manera atractiva y mantenerlo durante un tiempo. Que los alumnos tengan tiempo de verlo, de pensarlo, de hacer aportaciones. Cuando haya pasado un tiempo prudencial expondremos su solución. Y vuelta a empezar.

La esquina de los enigmas

Responde a unos principios parecidos a los del *Tablero de problemas*, pero utilizando enigmas, adivinanzas, asuntos de actualidad, etc. Los alumnos se sienten muy atraídos por este tipo de cuestiones, y al tener menos “aparato” matemático forman parte de sus conversaciones, discuten las posibles soluciones, presumen de conocer las respuestas, etc. Tienen, en general, un campo más amplio que los problemas estrictamente matemáticos. Cada semana se proponen cuatro enigmas de características variadas y se dan las soluciones (en algunos casos “posibles soluciones”) a los enigmas de la semana anterior. El enunciado suele ilustrarse con alguna imagen alusiva al tema.

Con mayor o menor contenido matemático, divertidos o serios, con diferentes grados de dificultad, unos más conocidos y otros menos, los que siguen son ejemplos de enigmas propuestos:

a) Comida sana.

El boticario y su hija, el médico y su mujer, comieron nueve pasteles y todos tocaron a tres, ¿cómo puede ser?

b) *Se rompió.*

¿Qué es lo que se rompe cuando se nombra?

c) *El hombre solitario.*

Un hombre vivió solo en una casa durante dos meses. No recibió visitas ni salió nunca de la casa. Al final de los dos meses se volvió loco y una noche apagó todas las luces, cerró el gas y el agua y salió de la casa. Como consecuencia de su ida murieron 90 personas. ¿Por qué?

d) *Comida para tres.*

Un viejo acertijo árabe dice: Un cazador se encontró con dos pastores, uno de los cuales tenía tres panes y el otro cinco. Todos los panes eran del mismo tamaño. Los tres hombres acordaron dividir el pan en partes iguales. Después de haber comido, el cazador dio a los pastores ocho monedas como pago. ¿Cómo deben repartírselas los dos pastores?

(Adaptados de P. Sloane; *Ejercicios de pensamiento lateral*; Zugarto Ed., 1999 y de *El huevo de chocolate*, página de Internet, donde se encuentra también muchas "fuentes" de inspiración.)

Otros elementos

Obviamente, cualquiera de los espacios se puede independizar. Si disponemos de lugar y de medios.

Pero hay otros elementos interesantes que pueden completar el Rincón. Por ejemplo, si disponemos de uno o dos armarios del tipo vitrina con las puertas de cristal y cerradura, de los que se encuentran en la biblioteca o en los laboratorios. Ahí podremos hacer exposiciones sencillas de materiales complementarios e interesantes, como podrían ser: libros antiguos, libros de texto de planes anteriores, libros de lectura actuales de contenido matemático, materiales didácticos curiosos, juegos, puzzles, barajas, sellos, monedas, y un sinfín de cosas más.

En un próximo artículo veremos otras posibilidades para mejorar o ampliar el Rincón de las Matemáticas con otros materiales y otro tipo de actividades.

Volvemos a los problemas comentados.

En el número anterior habíamos hechos propuestas muy variadas de problemas. La primera consistía en plantear un problema, buscar su solución e investigar cuántas maneras diferentes hay para resolverlo.

Problema 19

En un periódico diario, formado por un solo cuadernillo de hojas y en el cual 11 páginas están dedicadas al deporte, las páginas 20 y 45 se encuentran sobre la misma cara de una de las hojas. ¿Cuántas páginas tiene ese diario en total?

Este problema lo hemos tomado del 11º Rallye Mathématique Transalpin, desarrollado en Suiza en marzo de 2003 y publicado por la revista “Math École”, del mismo país, en su número 207, de junio de 2003. En ella, hacen el siguiente análisis del mismo:

Análisis de la tarea:

- Descubrir que las 11 páginas dedicadas a los deportes no tienen influencia sobre la solución del problema.
- Observar, sobre un periódico diario abierto o sobre un modelo, las paginaciones de las hojas cuando están separadas: (páginas impares a la derecha, “saltos” de 2 en 2 de una hoja a otra ...). Deduciendo que el anverso de la hoja “20 y 45” está seguido por el anverso de las hojas “18 y 47”, “16 y 49”, “14 y 51” hasta “2 y 63”.
- O descubrir, siempre a partir de las observaciones, que en un periódico diario o una revista, la suma de dos números de página dispuestos sobre el mismo lado de una hoja es constante y vale uno más que el número de páginas de la revista. En el caso presente: $20 + 45 - 1 = 64$.
- O calcular el número de páginas interiores que preceden a la hoja indicada, de 21 a 44, es decir 24 páginas, y calcular la cantidad de las otras páginas, hasta la 20 incluida y desde la 45 incluida, es decir $40 = 20 \times 2$ y finalmente hacer la suma para llegar al número total de páginas: $24 + 40 = 64$.
- O también observar que hay 19 páginas que preceden a la página 20 y, como consecuencia, 19 páginas que siguen a la página 45 y por consiguiente que el número total de páginas del periódico diario es $45 + 19 = 64$.

He aquí los comentarios de los correctores de las clases suizas:

1. La tasa de acierto total (“4 puntos”) varía poco de un nivel al otro: 48% en 6º y 7º, 51% en 8º.
2. La mayoría de las clases (46 en total) han acertado utilizando la resolución de la paginación, con casi siempre la lista completa de páginas de una hoja hasta 1 – 64 y las siguientes igualmente hasta 32 – 33.

3. Sólo 14 clases (de las cuales 10 son de 6º, 3 de 7º y 1 de 8º) utilizan una resolución basada en el número de páginas ($45 + 19$ o más raramente $20 + 24 + 20$). ¡Es sorprendente constatar que esta resolución es más utilizada en 6º!
4. Sólo 5 clases (4 en 6º y 1 en 7º) se dejan confundir por las 11 páginas de deportes. Nota: ¡La casi totalidad de las clases han ignorado totalmente hablar de la no influencia de estas 11 páginas!

La solución que nosotros proponemos es la que sigue. Hay varias maneras de afrontar este problema. Pero, en cualquier caso, es importante conocer cómo son los cuadernillos de papel que forman una publicación periódica. En cada hoja, la página de la izquierda (la que queda debajo) tiene numeración impar mientras que la de la derecha (la que queda encima) tiene numeración par. Si consideramos el cuadernillo completo, abierto, tendremos que la parte izquierda tiene numeración par y la derecha impar. Los alumnos deben utilizar algunos periódicos reales y analizarlos durante la resolución del problema, especialmente en la fase inicial.

Está claro, antes de la página de la izquierda hay tantas páginas como indica la numeración visible menos una; y después de la página de la derecha hay tantas páginas hasta el final como las que hay antes de la de la izquierda.

¡Ah! Las que están dedicadas a Deportes no “pintan” nada en el problema; son una distracción.

Si colocásemos las numeraciones de las páginas en orden, y llamando a_n a la última página, tendríamos:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 1 & 2 & \dots & 18 & 19 & 20 & 21 & \dots & 44 & 45 & 46 & 47 & \dots & a_{n-1} & a_n \\
 & & & & & & \uparrow & & & & & \uparrow & & & \\
 & & & & & & 20 & & & & 45 & & & &
 \end{array}$$

$$20 + 45 = 65$$

Todas las parejas de páginas que se encuentran en el mismo cuadernillo suman 65. Lo podemos ver fácilmente en las dos de la ilustración, pero también:

$$21 + 44 = 65 ; 19 + 46 = 65 ; 18 + 47 = 65 ; \dots$$

Esto nos indica que, generalizando la situación, también la suma de la primera y la última darán la misma suma: $1 + a_n = 65$.

Y de aquí resulta muy sencillo saber cuál es la última página:

$$a_n = 65 - 1 = 64$$

El diario tiene 64 páginas en total.

Pero a nosotros se nos ha ocurrido también proponerlo a nuestros alumnos de 1º y 2º de la ESO, para comparar su pensamiento con el de los niños y niñas suizas, y esto es lo que ha sucedido:

Se contabiliza un 27 % de errores: un 9 % de ellos ha sido provocado al considerar las páginas de deporte como influyentes en el problema; el resto corresponde a errores en la contabilización (por ejemplo contar dos veces las páginas centrales).

El 73 % restante de aciertos se reparte de la siguiente manera, de acuerdo con el camino utilizado para resolver el problema:

- Un 36 % contaron 19 páginas antes de la 20 y, por tanto, también después de la 45, es decir, $19 + 45 = 64$.
- Un 18 % contaron las páginas centrales (entre 20 y 45), las anteriores a la 20 y la propia 20, las posteriores a la 45 y ella misma, es decir, $20 + 24 + 20 = 64$.
- Un 18 % contaron las páginas centrales, hallaron la mitad, añadieron las primeras y luego duplicaron, es decir, $44 - 20 = 24$, $24 : 2 = 12$, $20 + 12 = 32$, $32 \times 2 = 64$.

No utilizaron ninguna de las otras posibilidades de conteo. ¿Cómo les fue a ustedes? ¿Hubo divergencias con respecto a lo indicado? Pongan un e-mail y cuéntenos.

La otra propuesta tenía que ver con la Matemagia. Eran los problemas 20 y 21.

Problema 20

El *Matemago* pide al espectador que, con la ayuda de una calculadora, eleve un número de dos cifras a su quinta potencia. El hallará su raíz quinta rápidamente. ¿En qué puede consistir el truco del mago? Exige un pequeño esfuerzo de memorización.

Operando con potencias, tabulando resultados y examinándolos, podemos obtener curiosas secuencias y consecuencias. De la observación del procedimiento podrán nuestros lectores, extraer efectos pedagógicos aplicables en sus clases, además de la propia actividad lúdica de la *matemagia*.

En el caso de las quintas potencias, ocurre que:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^5	0	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049

¡Acaban en la misma cifra que la base!

Y por supuesto los números de dos cifras también terminan, al elevarlos a 5, en la misma cifra de unidades que la base.

Considerando que el menor número de dos cifras, 10, al elevarlo a la quinta potencia, nos resulta un número de seis cifras: 100 000, y que el mayor, 99, nos da como resultado el número 9 509 900 499 de diez cifras, significa que entre estas cantidades de cifras están las demás potencias que estamos tratando.

Tabulemos:

Intervalo	Decena	Potencia inferior	Rango del número
10 a 19	1	100 000	100 mil
20 a 29	2	3 200 000	3 millones
30 a 39	3	21 300 000	24 millones
40 a 49	4	102 400 000	100 millones
50 a 59	5	312 500 000	300 millones
60 a 69	6	777 600 000	777 millones
70 a 79	7	1 680 700 000	1 500 millones
80 a 89	8	3 276 800 000	3 000 millones *
90 a 99	9	5 904 900 000	6 000 millones *

Lo cual constituye una considerable tabla a recordar. Pero no tanto; obsérvese que se ha simplificado un poco en la tercera columna. No olvidemos que el objetivo es sorprender al espectador con nuestra rapidez de cálculo. Esta última columna calificativa es la que permite situar las decenas del número con rapidez. Mientras el sujeto nos va leyendo, *lenta-mente*, el número nos da tiempo a determinar esa cifra; basta después con escuchar atentamente la cifra de las unidades y, casi antes de que él termine de decirla, ya le damos a saber la raíz quinta del número que nos está leyendo. Es importante recomendar la lectura lenta del número para darnos tiempo a pensar. Si no oímos **millones** sino **mil**, ya sabemos que estamos en la primera decena. En los restantes casos, la cantidad de millones nos sitúa entre dos cantidades redondeadas fáciles de recordar.

Veamos un ejemplo. Supongamos que el número dado es 8 587 340 257. Tan pronto como usted oiga “ocho mil millones” sabrá que la cifra de las decenas es un 9. Ignore todos los demás dígitos que le dictan hasta llegar al último, 7; en ese momento podrá dar inmediatamente como resultado el 97.

Cuando se va a realizar el truco, no debemos olvidar de proveernos de una calculadora cuya pantalla admita diez cifras. De no ser así, al calcular el alumno la quinta potencia, la calculadora redondeará el resultado con potencias de 10. Esto sería un inconveniente grande. Lo mejor es llevar una de ese tipo con nosotros y dársela para que haga los cálculos. Eso nos evitará algún disgusto que otro. Claro que también podría hacerse el cálculo de la quinta potencia de forma manual; aunque desluciría un poco el espectáculo por el tiempo empleado en ello y la posibilidad – todo es posible – de que el cálculo haya sido incorrecto.

No conviene repetir el juego más de dos o tres veces, ya que enseguida se nota que los dígitos finales concuerdan. Los calculistas profesionales trabajan con quintas potencias de números mucho mayores, extendiendo los sistemas descritos; a nosotros nos basta con la explicación de las raíces quintas de dos dígitos.

Como actividad complementaria se sugiere que los alumnos encuentren “trucos” para cuadrados o cubos de números con dos o tres cifras.

Problema 21

En esta ocasión el *Matemago* pide a un voluntario del público que escriba un número de 4 cifras, sin enseñarlo. A su lado debe escribir la suma de sus cifras y encima el número de tres dígitos que resulta de tachar una de las cifras del número que escribió (“la que menos le guste”). Ahora debe efectuar la resta y, simplemente por el resultado de esta resta, el mago averigua el número de 4 cifras que escribió al principio. ¿Cómo se hace el truco? ¿En qué se basa?

El procedimiento para este truco se basa en las llamadas raíces digitales: si sumamos todas las cifras de un número y del resultado se vuelven a sumar sus cifras, continuando así hasta obtener un único dígito, éste es la raíz digital del número.

Un procedimiento abreviado para hallar la raíz digital consiste en ir restando nueve según vamos sumando las cifras del número, así, si el número es el 7 485, sumamos $7+4=11$ y nos quedamos con el valor 2 ($11-9=2$) con el que proseguimos: $2+8=10$ y nos queda el 1 y finalmente, $1+5=6$, que es la raíz digital de 7 485. Siguiendo el procedimiento dado en la definición sería: $7+3+9+5=24$, y $2+4=6$.

Indicando por abcd el número elegido, al escribir la suma de sus cifras obtendríamos:

$$a + b + c + d, \text{ de raíz digital } R$$

Si restásemos al número $abcd$ el valor de $a + b + c + d$, nos queda:

$$1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c$$

y al aplicar a este resultado el sistema del cálculo de la raíz digital, dará 9, pues es la suma de tres múltiplos de 9.

Suponiendo que tachamos la cifra d , nos queda abc , es decir:

$$100a + 10b + c$$

de raíz digital S , igual a la de $R + d$. Por tanto, restando de abc la suma $a + b + c + d$, nos queda $99a + 9b + c$, cuya raíz digital debe ser $9 - d$.

En cuanto nos diga el voluntario el resultado de la resta, calculamos mentalmente su raíz digital X , y si es $X = 9$, éste es el número que tachó, si es otro número se resta de 9 y obtenemos el dígito tachado: $d = 9 - X$.

Para que no haya ambigüedades, debemos indicar que no se puede elegir el cero como cifra a tachar. Hay otras variantes para el primer paso del "truco", donde también se obtiene raíz digital 9, por ejemplo:

- Pedir que anotado un número donde no aparezca el cero, altere el orden de sus cifras y reste al mayor el menor.
- Que escriba un número cualquiera, que altere el orden de sus cifras un par de veces y sume los tres números. Hallar el cuadrado del número.

Como de costumbre, nuevos problemas para la próxima vez que nos encontremos en estas páginas.

Problema n° 21

Cuatro números primos tienen la siguiente estructura: AA; BAB; BACD; AAAC. Sabiendo que cada letra representa una cifra y que a letras iguales corresponden cifras iguales, ¿cuáles son los cuatro números?

Problema n° 22

Cuando Mario tenía dos veces la edad que tenía Julia cuando Mario tenía tres veces la edad que tenía Julia cuando Mario tenía los años que tiene ahora Julia, Julia tenía la mitad de la edad que Mario tenía cuando Julia tenía la mitad de la edad actual de Mario.

Tomando años enteros, ¿qué edad tienen actualmente Mario y Julia?

(Basado en un problema enunciado por J. A. H. Hunter en su *Entertaining Mathematical Teasers*)

Y aquí queda todo de momento. Hágannos caso. Escriban mensajes a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, esperamos sus noticias a la espera del próximo *NÚMEROS*.

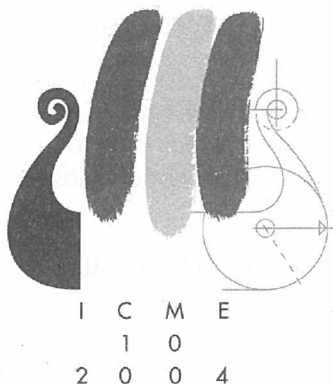
Club Matemático.

El Club Matemático está formado por los profesores: José Antonio Rupérez Padrón, del IES Canarias Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).

Correos electrónicos:

mgarciadeniz@sinewton.org

jaruperezpadron@sinewton.org



The 10th International Congress on Mathematical Education

Under the auspices of ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) the 10th International Congress on Mathematical Education, ICME-10, will be held in

Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004

The aim of the ICME congresses is to:

- Show what is happening in mathematics education worldwide, in terms of research as well as teaching practices
- Exchange information on the problems of mathematics education around the world
- Learn and benefit from recent advances in mathematics as a discipline

ICME-10 hopes to attract 3000-4000 researchers in mathematics education, mathematics educators, including teachers, and others working within the educational system, from around 100 countries.

<http://www.icme-10.dk/>